数理解析研究所講究録
第 1893 巻 2014 年 20-27

三角不等式の一般化について
On generalized triangle inequalities in normed spaces

新潟大学大学院自然科学研究科　泉田　保
Tamotsu Izumida
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
岡山県立大学情報工学部　三谷　健一
Ken-Ichi Mitani
Faculty of Computer Science and System Engineering, Okayama Prefectural University
新潟大学理学部　斎藤　吉助
Kichi-Suke Saito
Faculty of Science, Niigata University

1 序

この研究では, Euler-Lagrange 型の恒等式から派生する次の形の一般化された三角不等式を考察する. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $p\in\mathbb{R}, p>0$ とするとき,

$$\frac{\|a_1x_1+\cdots+a_nx_n\|^p}{\lambda}\leq\frac{\|x_1\|^p}{\mu_1}+\cdots+\frac{\|x_n\|^p}{\mu_n}\ (x_1,\ldots,x_n\in X), \tag{1}$$

ここで, $(a_1,\ldots,a_n,\lambda,\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ である.

Remark. H を Hilbert 空間とし, $\lambda,\mu,\nu,a,b\in\mathbb{R}, \lambda=\mu a^2+\nu b^2$ とする. このとき, 簡単な計算により, 次が成り立つことがわかる.

$$\frac{\|x\|^2}{\mu}+\frac{\|y\|^2}{\nu}-\frac{\|ax+by\|^2}{\lambda}=\frac{\|\nu bx-\mu ay\|^2}{\lambda\mu\nu}\ (x,y\in H).$$

これを Euler-Lagrange 型の恒等式という. さらに, $\lambda\mu\nu>0$ のとき, この恒等式から, 任意の $a,b\in\mathbb{C}$ に対して, 次の不等式が成り立つことがわかる.

$$\frac{\|ax+by\|^2}{\lambda}\leq\frac{\|x\|^2}{\mu}+\frac{\|y\|^2}{\nu}\ (x,y\in H).$$

[9] において, 高橋-Rassias-齋藤-高橋は

$$\frac{\|ax+by\|^p}{\lambda} \leq \frac{\|x\|^p}{\mu} + \frac{\|y\|^p}{\nu} \ (x, y \in H)$$

を満たす $(a, b, \lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}^3$ を次のように特徴付けた.

Theorem 1.1 (cf. [9, Theorem 1.1 と 4.1]). X をノルム空間とし, $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$, $a, b \in \mathbb{C}, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ とする. さらに

$$D_p^+ = \left\{ (a, b, \lambda, \mu, \nu) : \frac{\|ax+by\|^p}{\lambda} \leq \frac{\|x\|^p}{\mu} + \frac{\|y\|^p}{\nu} \ (x, y \in X) \right\}$$

とおく. $p > 1$ のとき, 次が成り立つ. ただし, $p' = (1-1/p)^{-1}$ である.

(i) $D_p^+ \cap \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0\}$
$$= \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0, |\lambda|^{1/(p-1)} \geq |\mu|^{1/(p-1)}|a|^{p'} + |\nu|^{1/(p-1)}|b|^{p'}\}.$$

(ii) $D_p^+ \cap \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu > 0\}$
$$= \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu > 0, |\lambda|^{1/(p-1)} \leq |\mu|^{1/(p-1)}|a|^{p'} - |\nu|^{1/(p-1)}|b|^{p'}\}.$$

(iii) $D_p^+ \cap \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu < 0\}$
$$= \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu < 0, |\lambda|^{1/(p-1)} \leq -|\mu|^{1/(p-1)}|a|^{p'} + |\nu|^{1/(p-1)}|b|^{p'}\}.$$

(iv) $D_p^+ \cap \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu < 0\} = \varnothing$.

(v) $D_p^+ \cap \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu < 0\} = \varnothing$.

(vi) $D_p^+ \cap \{\lambda > 0, \mu < 0, \nu > 0\} = \varnothing$.

(vii) $D_p^+ \cap \{\lambda > 0, \mu < 0, \nu < 0\} = \varnothing$.

(viii) $D_p^+ \cap \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu > 0\} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^3 \setminus \{\lambda\mu\nu = 0\}$.

$p = 1$ のとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} D_1^+ = &\{\lambda < 0, \mu > 0, \nu > 0\} \\ &\cup \{\lambda > 0, \mu > 0, \nu > 0, \lambda \geq \mu|a|, \lambda \geq \nu|b|\} \\ &\cup \{\lambda < 0, \mu < 0, \nu > 0, \lambda \geq \mu|a|, -\nu|b| \geq \mu|a|\} \\ &\cup \{\lambda < 0, \mu > 0, \nu < 0, \lambda \geq \nu|b|, -\mu|a| \geq \nu|b|\}. \end{aligned}$$

次いで, [2] において, Dadipour-Moslehian-Rassias-高橋は

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^p \leq \frac{\|x_1\|^p}{\mu_1} + \cdots + \frac{\|x_n\|^p}{\mu_n} \ (x_1, \ldots, x_n \in X) \tag{2}$$

を満たす $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ の特徴付けを得た (cf. 本稿 [Theorem3.5]).

また, [1] において, Abramovich-Ivelić-Pečarić は, (1) を満たす $(a_1, \ldots, a_n, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の特徴付けを得た (cf. 本稿 [Theorem3.6]).

この研究で我々は, Banach 空間における ψ-直和なる概念 (cf. [4]) を用いて (2) の一般化を試みた. 加えて, Dadipour-Moslehian-Rassias-高橋および Abramovich-Ivelić-Pečarić の結果の別証明を得た.

2 準備

まず, 準備として [5], [6], [7], [8] により, $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized ノルムについての基本事項をまとめる.

$\mathbb{C}^n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは

$$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\| = \|(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)\|$$

が任意の $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ について成り立つときをいい, また normalized であるとは

$$\|(1, 0, \ldots, 0)\| = \|(0, 1, 0, \ldots, 0)\| = \cdots = \|(0, \ldots, 0, 1)\| = 1.$$

が成り立つときをいう. AN_n を $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized ノルム全体の集合とする. [8] において, 斎藤-加藤-高橋は $\mathbb{C}^n$ 上の absolute normalized ノルムを次のように連続凸関数を用いて特徴づけた. $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ に対して

$$\Delta_n = \left\{ (t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \geq 0, \sum_{j=1}^{n-1} t_j \leq 1 \right\}$$

とおく. 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して,

$$\psi(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) = \left\| \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j, t_1, \ldots, t_{n-1} \right) \right\| \quad ((t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) \in \Delta_n) \tag{3}$$

と定義すると, ψ は Δ_n 上の連続凸関数となり, 次の条件を満足する:

$$\psi(0, \ldots, 0) = \psi(1, 0, \ldots, 0) = \psi(0, 1, 0, \ldots, 0) = \cdots = \psi(0, \ldots, 0, 1) = 1 \tag{A$_0$}$$

$$\psi(t_1, \ldots, t_{n-1}) \geq (t_1 + \cdots + t_{n-1})\psi\left(\frac{t_1}{t_1 + \cdots + t_{n-1}}, \ldots, \frac{t_{n-1}}{t_1 + \cdots + t_{n-1}} \right) \tag{A$_1$}$$

$$\psi(t_1, \ldots, t_{n-1}) \geq (1 - t_1)\psi\left(0, \frac{t_2}{1 - t_1}, \ldots, \frac{t_{n-1}}{1 - t_1} \right) \tag{A$_2$}$$

$$\psi(t_1, \ldots, t_{n-1}) \geq (1 - t_2)\psi\left(\frac{t_1}{1 - t_2}, 0, \frac{t_3}{1 - t_2}, \ldots, \frac{t_{n-1}}{1 - t_2} \right) \tag{A$_3$}$$

$$\vdots$$

$$\psi(t_1, \ldots, t_{n-1}) \geq (1 - t_{n-1})\psi\left(\frac{t_1}{1 - t_{n-1}}, \ldots, \frac{t_{n-2}}{1 - t_{n-1}}, 0 \right). \tag{A$_n$}$$

逆に, Ψ_n を Δ_n 上のすべての連続凸関数で (A_0),(A_1), ... ,(A_n) を満たすもの全体の集合とする. このとき, 任意の $\psi \in \Psi_n$ に対して, $\mathbb{C}^n$ 上の写像を

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\|_\psi = \begin{cases} (|z_1| + \cdots + |z_n|)\psi\left(\frac{|z_2|}{|z_1| + \cdots + |z_n|}, \ldots, \frac{|z_n|}{|z_1| + \cdots + |z_n|} \right) & ((z_1, \ldots, z_n) \neq (0, \ldots, 0)) \\ 0 & ((z_1, \ldots, z_n) = (0, \ldots, 0)) \end{cases}$$

と定義すると, $\|\cdot\|_\psi \in AN_n$ であり, なおかつ, (3) を満たす. 従って, AN_n と Ψ_n は (3) の下で 1 対 1 に対応する.

次に, このノルム空間の共役空間を考察する. $\psi \in \Psi_n$ とし. $\|\cdot\|_\psi$ の共役ノルム $\|\cdot\|_\psi^*$ を

$$\|(z_1, z_2, \ldots, z_n)\|_\psi^* = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^n z_j w_j\right| : \|(w_1, w_2, \ldots, w_n)\|_\psi = 1\right\} \qquad ((z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$$

で定義する. すると, $\|\cdot\|_\psi^* \in AN_n$ であり, Ψ_n 内の対応する連続凸関数は

$$\psi^*(s_1, \ldots, s_{n-1}) = \sup_{(t_1,\ldots,t_{n-1})\in\Delta_n} \frac{\left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} s_j\right) + \sum_{j=1}^{n-1} t_j s_j}{\psi(t_1, \ldots, t_{n-1})}$$

となる. ここで, $\|\cdot\|_\psi^* = \|\cdot\|_{\psi^*}$ となることに注意する. さらに, 任意の $(z_1, \ldots, z_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して generalized Hölder inequality:

$$\sum_{j=1}^n |z_j w_j| \le \|(z_1, \ldots, z_n)\|_\psi \; \|(w_1, \ldots, w_n)\|_{\psi^*} \tag{4}$$

が成り立つ.

ここで, absolute normalized ノルムの例として, $\mathbb{C}^n$ 上の ℓ_p-norm:

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\|_p = \begin{cases} (|z_1|^p + \cdots + |z_n|^p)^{\frac{1}{p}} & (1 \le p < \infty) \\ \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\} & (p = \infty) \end{cases}$$

を考察する. まず, 任意の $\|\cdot\| \in AN_n$ に対して

$$\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\| \le \|\cdot\|_1$$

が成り立つ. また, 対応する $\psi = \psi_p \in \Psi_n$ は

$$\psi_p(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} \left\{\left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j\right)^p + t_1^p + \cdots + t_{n-1}^p\right\}^{\frac{1}{p}} & (1 \le p < \infty) \\ \max\left\{1 - \sum_{j=1}^{n-1} t_j, t_1, \ldots, t_{n-1}\right\} & (p = \infty) \end{cases}$$

であり, $\|\cdot\|_p$ の共役ノルム $\|\cdot\|_p^* = \|\cdot\|_{\psi_p}^*$ は

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\|_p^* = \begin{cases} (|z_1|^q + \cdots + |z_n|^q)^{\frac{1}{q}} & (1 < p < \infty) \\ \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\} & (p = 1) \end{cases}$$

である. ここで $1/p + 1/q = 1$ である.

この章の最後に, Δ_n 上の連続凹関数 $\tilde{\psi}$ で

$$\tilde{\psi}(0,\ldots,0)=\tilde{\psi}(1,0,\ldots,0)=\tilde{\psi}(0,1,0,\ldots,0)=\cdots=\tilde{\psi}(0,\ldots,0,1)=1$$

を満たすもの全体の集合 $\tilde{\Psi}_n$ を考える. $\psi\in\Psi_n$ の場合と同様に, $\tilde{\psi}\in\tilde{\Psi}_n$ に対して $\mathbb{C}^n$ 上の写像 $\|\cdot\|_{\tilde{\psi}}$ を

$$\begin{aligned}&\|(z_1,\ldots,z_n)\|_{\tilde{\psi}}\\&=\begin{cases}(|z_1|+\cdots+|z_n|)\tilde{\psi}\left(\frac{|z_2|}{|z_1|+\cdots+|z_n|},\ldots,\frac{|z_n|}{|z_1|+\cdots+|z_n|}\right) & ((z_1,\ldots,z_n)\neq(0,\ldots,0))\\ 0 & ((z_1,\ldots,z_n)=(0,\ldots,0))\end{cases}\end{aligned}$$

と定義する. この写像はノルムにはならないが, 任意の $(z_1,\ldots,z_n),(w_1,\ldots,w_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して, generalized inverse Minkowski inequality:

$$\|(|z_1|+|w_1|,\ldots,|z_n|+|w_n|)\|_{\tilde{\psi}}\geq\|(|z_1|,\ldots,|z_n|)\|_{\tilde{\psi}}+\|(|w_1|,\ldots,|w_n|)\|_{\tilde{\psi}}\tag{5}$$

が成り立つ.

また, $p\in\mathbb{R},0<p<1$ に対して,

$$\tilde{\psi}_p(t_1,\ldots,t_{n-1})=\left\{\left(1-\sum_{j=1}^{n-1}t_j\right)^p+t_1^p+\cdots+t_{n-1}^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

とおくと, $\tilde{\psi}_p\in\tilde{\Psi}_n$ であり, $\|(z_1,\ldots,z_n)\|_{\tilde{\psi}_p}=(|z_1|^p+\cdots+|z_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ となることに注意する.

3 主結果とその系

$(X,\|\cdot\|)$ をノルム空間とし, $n\in\mathbb{N},n\geq 2$ とする. $\psi\in\Psi_n$ に対して, 直和空間 X^n は

$$\|(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_\psi=\|(\|x_1\|,\|x_2\|,\ldots,\|x_n\|)\|_\psi\ (x_1,\ldots,x_n\in X)\tag{6}$$

によってノルム空間となる. このノルム空間 $(X^n,\|\cdot\|_\psi)$ を X の ψ-直和といい, $\ell_\psi^n(X)$ と表す (cf. [4]). この下で Generalized Hölder inequality (4) を用いることにより, 我々は次の結果を得た.

Theorem 3.1. X をノルム空間とし, $\psi\in\Psi_n$, $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ とする. このとき

$$\left\|\sum_{j=1}^n a_jx_j\right\|\leq\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\psi\quad(x_1,\ldots,x_n\in X)$$

が成り立つためには, $\|(a_1,\ldots,a_n)\|_{\psi^*}\leq 1$ であることが必要十分条件である.

Theorem 3.1 において $\psi=\psi_p$ とおくと, 次の Corollary が得られる.

Corollary 3.2. X をノルム空間とし, $p \in \mathbb{R}, p > 1$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ とする. このとき,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|^p \leq \|x_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p \quad (x_1, \ldots, x_n \in X)$$

が成り立つためには, $(|a_1|^q + \cdots + |a_n|^q)^{\frac{1}{q}} \leq 1$ であることが必要十分条件である. ここで $1/p + 1/q = 1$ である.

さて, $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}_n$ の場合も X^n に対して $\|\cdot\|_{\tilde{\psi}}$ を (6) と同様に定義し, $(X^n, \|\cdot\|_{\tilde{\psi}})$ を考え $\ell^n_{\tilde{\psi}}(X)$ と表す. この下で generalized inverse Minkowski inequality (5) を用いることにより, 我々は次の結果を得た.

Theorem 3.3. X をノルム空間とし, $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}_n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ とする. このとき,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\| \leq \|(x_1, \ldots, x_n)\|_{\tilde{\psi}} \quad (x_1, \ldots, x_n \in X)$$

が成り立つためには, $\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} \leq 1$ であることが必要十分条件である.

Theorem 3.3 において $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_p$ とおくと, 次の Corollary が得られる.

Corollary 3.4. X をノルム空間とし, $p \in \mathbb{R}, 0 < p \leq 1$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ とする. このとき,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|^p \leq \|x_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p \quad (x_1, \ldots, x_n \in X)$$

が成り立つためには, $\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} \leq 1$ であることが必要十分条件である.

Remark. 上の Theorem と Corollary は, 次の明らかな事実の一般化である. X をノルム空間とし, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ とする. このとき,

$$\|a_1 x_1 + a_2 x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad (x_1, x_2 \in X)$$

が成り立つためには, $\max\{|a_1|, |a_2|\} \leq 1$ であることが必要十分条件である.

以上の結果を用いれば, $p \in \mathbb{R}, p > 0$ に対して

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^p \leq \frac{\|x_1\|^p}{\mu_1} + \cdots + \frac{\|x_n\|^p}{\mu_n} \ (x_1, \ldots, x_n \in X)$$

を満たす $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ の特等付けを得ることは容易である. まず,

$$F(p) = \left\{ (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n : \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^p \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\|x_j\|^p}{\mu_j} \ (x_1, \ldots, x_n \in X) \right\}$$

とおく. さらに, 各々の $k = 0, 1, \ldots, n$ に対して, $F(p)$ の部分集合で $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ のうちちょうど k 個が負であるものを $F(p\,;\ k)$ と表す. ここで,

$$F(p) = \bigcup_{k=0}^{n} F(p\,;\ k)$$

となることを注意する. Corollary 3.2 および 3.4 により, 次の Theorem を容易に示すことができる.

Theorem 3.5 (cf. [2, Theorems 2.4 と 2.5]). X をノルム空間とし, $p \in \mathbb{R}, p > 0$ とする. このとき次が成り立つ:

(i) $F(p\,;\,0)$

$$= \begin{cases} \left\{ (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n : \mu_1, \ldots, \mu_n > 0,\ \sum_{j=1}^{n} \mu_j^{\frac{1}{p-1}} \leq 1 \right\} & (p > 1) \\ (0,1] \times \cdots \times (0,1] & (0 < p \leq 1); \end{cases}$$

(ii) $F(p\,;\,k) = \varnothing\ (k = 1, \ldots, n)$;

(iii) $F(p) = F(p\,;\,0)$.

さらに, $p \in \mathbb{R}, p > 0$ に対して

$$\frac{\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\|^p}{\lambda} \leq \frac{\|x_1\|^p}{\mu_1} + \cdots + \frac{\|x_n\|^p}{\mu_n} \quad (x_1, \ldots, x_n \in X)$$

を満たす $(a_1, \ldots, a_n, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ の特徴付けも容易に得ることができる.

Theorem 3.6 (cf. [1, Theorem 2]). X をノルム空間とし, $p, q \in \mathbb{R}, p > 1, 1/p + 1/q = 1$, $(a_1, \ldots, a_n, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ とする. このとき,

$$\frac{\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\|^p}{\lambda} \leq \frac{\|x_1\|^p}{\mu_1} + \cdots + \frac{\|x_n\|^p}{\mu_n} \quad (x_1, \ldots, x_n \in X)$$

は次のそれぞれの条件の下で成り立つ:

(i) $\lambda > 0$, すべての $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\mu_j > 0$, かつ

$$\lambda^{\frac{1}{p-1}} \geq \sum_{j=1}^{n} \mu_j^{\frac{1}{p-1}} |a_j|^q;$$

(ii) $\lambda < 0$, ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\mu_i < 0$, すべての $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ に対して $\mu_j > 0$, かつ

$$(-\mu_i)^{\frac{1}{p-1}} |a_i|^q \geq (-\lambda)^{\frac{1}{p-1}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mu_j^{\frac{1}{p-1}} |a_j|^q;$$

(iii) $\lambda < 0$, すべての $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\mu_j > 0$, かつ $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ は任意.

参考文献

[1] Abramovich S., Ivelić S. Pečarić J., Extension of the Euler-Lagrange identity by superquadratic power functions, International Journal of Pure and Applied Math., 2012, 74(2), 209–220.

[2] Dadipour F., Moslehian M.S., Rassias J.M., Takahasi S.-E., Characterizations of a generalized triangle inequality in normed spaces, Nonlinear Anal., 2012, 75(2), 735–741

[3] Izumida T., Mitani K.-I., Saito, K.-S., Another approach to characterizations of generalized triangle inequalities in normed spaces, to appear in Central European J. Math.

[4] Kato M., Saito K.-S., Tamura T., On ψ-direct sums of Banach spaces and convexity, J. Aust. Math. Soc., 2003, 75(3), 413–422

[5] Mitani K.-I., Oshiro S., Saito K.-S., Smoothness of ψ-direct sums of Banach spaces, Math. Ineq. Appl., 2005, 8(1), 147–157

[6] Nikolova L., Persson L.-E., Varošanec S., The Beckenbach-Dresher inequality in the ψ-direct sums of spaces and related results, J. Inequal. Appl., 2012, 2012:7, 14pp.

[7] Saito K.-S., Kato M., Takahashi Y., Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., 2000, 244(2), 515–532

[8] Saito K.-S., Kato M., Takahashi Y., Absolute norms on $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., 2000, 252(2), 879–905

[9] Takahasi S.-E., Rassias J.M. , Saitoh S., Takahashi Y., Refined generalizations of the triangle inequality on Banach spaces, Math. Ineq. Appl., 2010, 13(4), 733–741.